תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 4 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 1

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)+B\sin(kx-\omega t)+C\cos(kx-\omega t)+D\sin(kx-\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega=v\cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\psi(x,t)=A_1\cos(kx-\omega t+\phi_1)+A_2\cos(kx-\omega t+\phi_2)=$$
$$B_1\cos kx\cos\omega t+B_2\cos kx\sin\omega t+B_3\sin kx\cos\omega t+B_4\sin kx\sin\omega t=$$
$$C_1\cos kx\cos(\omega t+\phi_1)+C_2\sin kx\cos(\omega t+\phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים

$$\psi(x,t)=A_1e^{\mathrm{i}(kx+\omega t)}+A_2e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+A_3e^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}+A_4e^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3=A_1^*$ ו- $A_4=A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t)=Ae^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+Be^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}$$

שאלות

1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$.
נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2\text{m}$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות).
חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2\times10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$, במיתר מעורר גל מהצורה:
$\psi(x,t) = 0.005\cos(3x - 90t)$.
חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.

א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה-x, בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.

ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.

ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3\text{sec}$?

ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?

ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

4) תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x,t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03\,\frac{\text{kg}}{m}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5) תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך dx, הוא $F = -bdx\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.
הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x,t) = X(x)f(t)$ וזהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x,t=0) = a\cos(k_0x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

תשובות סופיות

1) $9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2) $30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};\ 0.102\mathrm{N};\ 0.45\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3) א. $y(x,t)=0.006_m\sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$ ב. $a(x,t)=0.00096\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$

ג. $x=85_m+50n$, כאשר n מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

ד. $t=0.001_s-2.5_s n$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

4) א. $y(x,t)=(4x+8t)^2+(4x-8t)^2$ ב. $2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ג. $0.12\mathrm{N}$ ד. לא.

5) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{b}{T}\frac{\partial\psi}{2t}+\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

ב. $\psi(x,t)=\left[A\cos(kx)+B\sin(kx)\right]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)2C\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\Gamma=\frac{b}{\rho}$.

ג. $\psi(x,t)=a\cos(k_0x)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)\frac{\Gamma}{2\omega}\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\omega=\sqrt{\frac{k_0^2T}{\rho}-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$.

פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר

רקע

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\psi(x-vt,0)+\psi(x+vt,0)\right]+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\dot{\psi}(x',0)\,dx'$$

שאלות

1) תרגיל – גל נע שמאלה וגל במנוחה

למיתר בעל צפיפות מסה $\rho_0=0.2\,\frac{\text{kg}}{m}$ יש מתיחות $T=0.8\,N$. ברגע $t=0$ צורת המיתר היא $\Psi(x,0)=0.4\,sin(20x)$. במיתר נע גל בכיוון החיובי של ציר ה-x

א. רשמו ביטוי עבור פונקציית הגל בכל רגע, $\Psi(x,t)$.

ב. מהם האמפליטודה , אורך הגל, מספר הגל, התדירות וזמן המחזור של הגל?

ג. כיצד ישתנו התשובות לסעיפים א-ב, אם במקום שיהיה נתון שהגל מתקדם בכיוון החיובי, נתון שבזמן $t=0$ המיתר נמצא במנוחה בכל מקום?

2) תרגיל – מציאת פונקציית גל מתנאי התחלה

במיתר אינסופי מסוים, מהירות הגלים היא $15\,\frac{m}{\text{sec}}$, ברגע $t=0$ נתון ש-

$\Psi(x,0)=|x|e^{-\frac{|x|}{b}}$ וכן $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0}=a\frac{x}{b}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$, כאשר a , b קבועים נתונים.

מצאו את $\Psi(x,t)$.

3) תרגיל – בניית פונקציית גל

נתון מיתר ובו מהירות הגלים היא $v=120\,\frac{m}{\text{sec}}$. הגל במיתר הוא $\Psi(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$. נתון גם כי $g(y)=2f(y)+0.001\,sin(5y)$,

וגם שברגע $t=0$, $\Psi(x,0)=0.002\,sin(5x)-0.003x$.

הניחו יחידות סטנדרטיות ומצאו את :

א. פונקציית הגל בכל מיקום וזמן.

ב. מהירות חתיכה של המיתר הנמצאת במיקום $x=0.8\,m$, וברגע $t=0.2\,sec$?

נספח: פתרון עם תנאי שפה התלויים בזמן

אם נתונה הפונקציה של הקצה כתלות בזמן (נסמנה ב $f(t)$) אז הגל שנוצר ממנה יהיה:

$$\Psi(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

במקרה של כוח התלוי בזמן שפועל על קצה $F_D(t)$ (ואין גל שנע בכיוון השלילי)

$$f(t)=\frac{v}{T}\int F_0(t)\,dt$$

4) תרגיל – מנוע מייצר גל

צפיפות המסה של מיתר חצי אינסופי היא $\rho=0.012\frac{\text{kg}}{m}$ והמתיחות שלו היא $520N$. בקצה $x=0$ ישנו מקור גלים (מנוע) המאלץ את הנקודה הזו לנוע באופן $b\left(1-e^{-\alpha t^2}\right)$ כאשר $b=5\text{cm}$ ו- α קבוע מסוים. ברגע $t=0$ המיתר נמצא בשיווי משקל בכל מקום והמקור מתחיל לפעול. המקור יוצר גל, הנע בכיוון החיובי של ציר ה $x-$. נתון שברגע $t=0.2sec$ סטיית המיתר משיווי משקל בנקודה $x=15m$ היא $4cm$.

א. קבלו ביטוי לפונקציית הגל בכל רגע ומקום, $\Psi(x,t)$.
ב. חשבו את ערכו המספרי של הקבוע α.
ג. מצאו ביטוי עבור הכוח המפעיל את המנוע.
ד. חשבו את $\Psi(x,t=0.1\ sec)$ ושרטטו את הפונקציה.

5) תרגיל - עוד מנוע

מיתר חצי אינסופי בעל צפיפות מסה $\rho=0.3\frac{\text{kg}}{m}$ מוחזק במתיחות של $270N$. קצה המיתר נמצא ב x=0, בו יש מנוע המפעיל את הכוח הבא:

$$F_D(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t^2(t-1)(t-4) & 0\le t\le 4s\\ 0 & t\ge 4s\end{cases}$$

א. רשמו ביטוי עבור פונקציית הגל בכל מקום ובכל רגע. הניחו שהמיתר נמצא במנוחה ובשיווי משקל ב $t=0$
ב. שרטטו את פונקציית הגל ברגעים $t=6{,}3\ sec$.

תשובות סופיות

1) א. $\psi(x,t)=0.4\sin\left(20(x-2t)\right)$

ב. $A=0.4m,\ \ \lambda=\frac{\pi}{10}m,\ \ K=20\frac{1}{m},\ \ f=\frac{20}{\pi}\text{Hz},\ \ T=\frac{\pi}{20}\sec$

ג. $\psi=(x,t)=0.4\sin(20x)\cos(40t)$; אין שינוי בפרמטרים של סעיף ב.

2) $$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\left[|x-15t|e^{-\frac{|x-15t|}{b}}+|x+15t|e^{-\frac{|x+15t|}{b}}\right]-\frac{ab}{60}\left[e^{-\left(\frac{x+15t}{b}\right)^2}-e^{-\left(\frac{x-15t}{b}\right)^2}\right]$$

3) א. $$\psi(x,t)=0.001\sin\left(5(x-120t)\right)+0.001(x-120t)+$$
$$+0.001\sin\left(5(x-120t)\right)+0.002(x-120t)$$

ב. $0.642\frac{\text{m}}{\text{s}}$

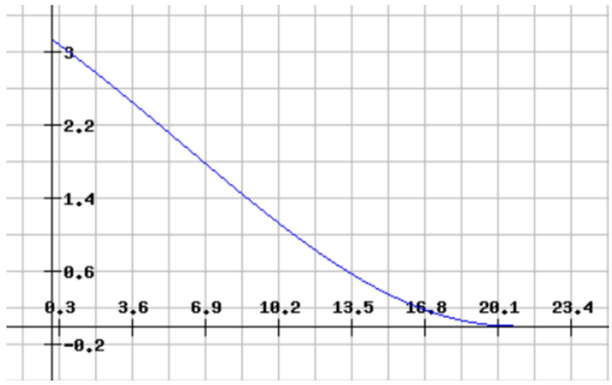
4) א. $$\psi(x,t)=\begin{cases}0 & t<\frac{x}{v}\\ b\left(1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v}\right)^2}\right) & t\geq\frac{x}{v}\end{cases}$$

ב. $98.4\frac{1}{\sec^2}$

ג. $F(t)=\frac{2\alpha Tb}{v}te^{-\alpha t^2}$

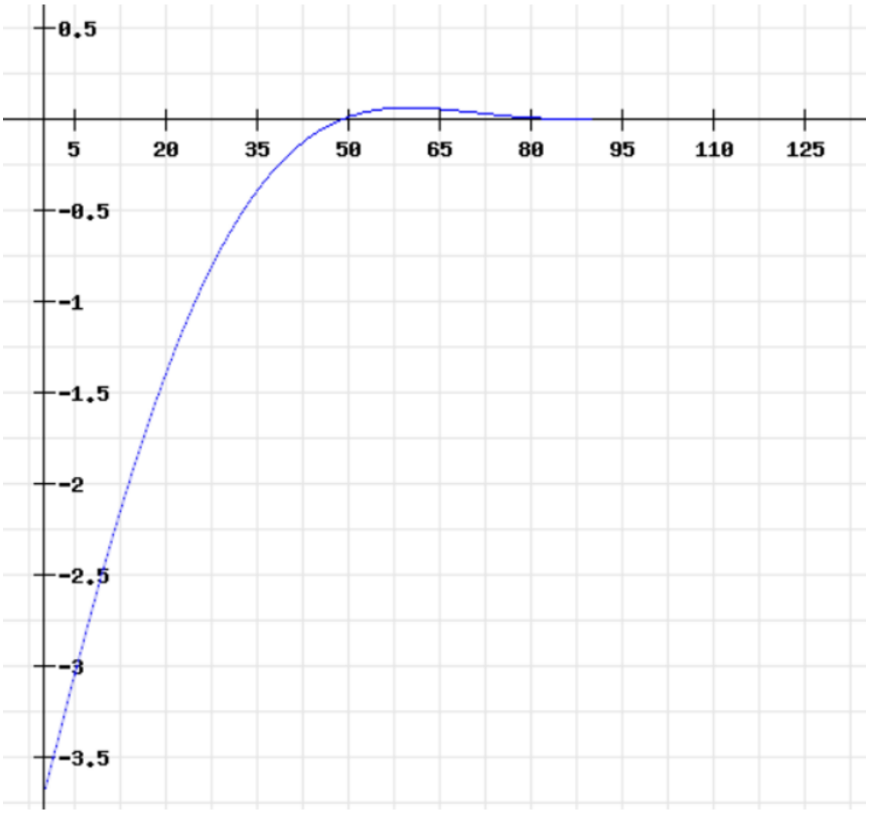
ד. $\psi(x,0.1)=5\text{cm}\left(1-e^{-98.4\left(0.1-\frac{x}{208}\right)^2}\right)$

שרטוט :



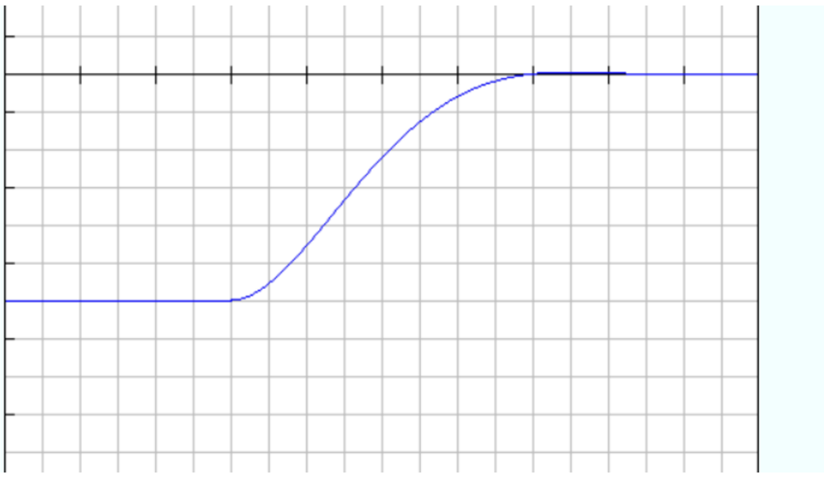
5) א. $$\psi(x,t)=\frac{1}{9}\begin{cases}0 & t-\frac{x}{30}\leq 0\\ \frac{2}{5}\left(t-\frac{x}{30}\right)^5-\frac{5}{2}\left(t-\frac{x}{30}\right)^4+\frac{8}{3}\left(t-\frac{x}{30}\right)^3 & 0\leq t-\frac{x}{30}<4\\ 1220 & t-\frac{x}{30}\geq 4\end{cases}$$

ב. $$\psi(x,3)=\frac{1}{9}\begin{cases}0 & 90\leq x\\ \frac{2}{5}\left(3-\frac{x}{30}\right)^5-\frac{5}{2}\left(3-\frac{x}{30}\right)^4+\frac{8}{3}\left(3-\frac{x}{30}\right)^3 & 0\leq x\leq 90\end{cases}$$



שרטוט :

$$\psi(x,6)=\frac{1}{9}\begin{cases}0 & 180\le x\\ \frac{2}{5}\left(6-\frac{x}{30}\right)^5-\frac{5}{2}\left(6-\frac{x}{30}\right)^4+\frac{8}{3}\left(6-\frac{x}{30}\right)^3 & 60\le x\le 180\end{cases}$$



שרטוט :

החזרה והעברה

רקע

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$.

רציפות הפונקציה $1.\ \psi_L(0,t)=\psi_R(0,t)$

רציפות הכוח $2.\ F_L=F_R$

אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת

$$\left.\frac{\partial\psi_L}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi_R}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\psi_r(x,t)=r\psi:(-x,t)$$
$$\psi_t(x,t)=t\psi:\left(\frac{v_1}{v_2}x,t\right)$$
$$v_1=\sqrt{\frac{T}{\rho_1}}v_2=\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

מקדם החזרה

$$r=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}}$$

מקדם העברה

$$t=\frac{2v_2}{v_2+v_1}=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}$$

הערה : את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

שאלות

1) תרגיל – ביטול של הגל העובר או החוזר

מיתר מורכב משני חלקים בעלי צפיפויות שונות ρ_1 ו-ρ_2 ומתיחות אחידה T .
גל מהצורה $\Psi_A(x,t) = |A|\cos(k_1 x - \omega t)$ מתקדם בכיוון החיובי ממיתר 1 לכיוון מיתר 2. נתונים: $\rho_2, \rho_1, k_1, T, A, \omega$

א. מצאו את הביטוי עבור הגל המועבר והגל המוחזר באמצעות נתוני השאלה.

ב. נניח עתה, כי בנוסף ל-Ψ_A שולחים גל נוסף ממיתר 2 לכיוון מיתר 1: $\Psi_D(x,t) = |D|\cos(-k_2' x - \omega' t + \varphi)$. נתון כי $\rho_2 < \rho_1$.
מצאו את $\varphi, \omega', k_2', D,$ כך שלאחר המעבר של הגלים בין המיתרים, במיתר 2 יהיה רק גל הנוסע שמאלה. מהם התנאים לכך שבמיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה?

ג. האם ניתן למצוא תנאי, עבורו בו-זמנית במיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה ובמיתר 2 רק גל הנוסע שמאלה? נמקו.

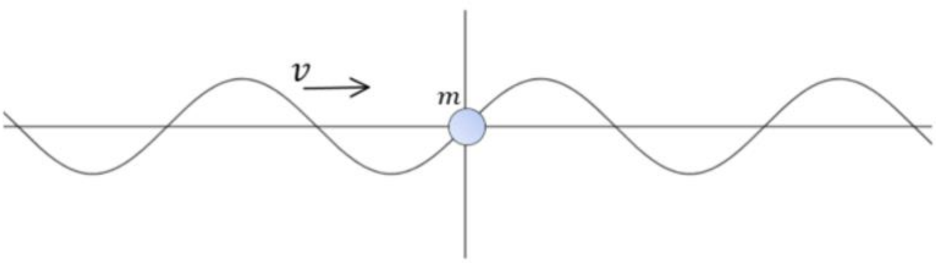
2) תרגיל - החזרה והעברה ממסה על מיתר

חרוז קטן בעל מסה m נמצא על מיתר מתוח בעל מתיחות אחידה.
גל המתקדם משמאל במיתר מזיז את החרוז בתנועה אנכית בלבד.
צפיפות המסה ליחידת אורך של המיתר היא ρ ומהירות הגלים במיתר היא v.

א. הגדירו את ראשית הצירים במיקום החרוז ורשמו פונקציית גל כללית עבור המיתר משמאל ומימין לחרוז. השתמשו במספרים מורכבים.
מהם תנאי השפה של פונקציית הגל בנקודה בה נמצא החרוז?

נסמן ב-A את אמפליטודת הגל הפוגע, ב-B את אמפליטודת הגל המוחזר וב-C את אמפליטודת הגל העובר.

ב. הראו כי: $\frac{B}{A} = \frac{iQ}{1-iQ}$ ו- $\frac{C}{A} = \frac{1}{1-iQ}$,
כאשר: $Q = \frac{m\omega}{2\rho v}$.



תשובות סופיות

1) א.
$$\psi_r(x,t)=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}|A|\cos(k_1x+\omega t)$$
$$\psi_t(x,t)=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}|A|\cos(k_2x+\omega t),\qquad k_2=k_1\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

ב. שמאלה:
$$k_2=k_1',\ \ w=w',\ \ \phi=0$$
$$|D|=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}|A|$$

ימינה:
$$k_2=k_1',\ \ w=w',\ \ \phi=\pi$$
$$|D|=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{\rho_2}}|A|$$

ג. לא, כי הפאזה בכל אחד צריכה להיות שונה.

2) א. $\psi_L(x=0,t)=\psi_R(x=0,t)$, $T\left(\left.\frac{\partial\psi_R}{\partial x}\right|_{x=0}-\left.\frac{\partial\psi_L}{\partial x}\right|_{x=0}\right)=m\ddot{\psi}_L(x=0,t)$

ב. הוכחה בסרטון.

עכבה

רקע

העכבה, נקראת גם אימפדנס (impedance), מסומנת באות Z, ונוסחתה

$$Z=\sqrt{\rho T}=\frac{T}{V}$$

T – מתיחות

V – מהירות הגל

$$|Z|=\frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y – הכוח על אלמנט מסה

$V_y(t)$ – מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2 :

$r=\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$ מקדם החזרה

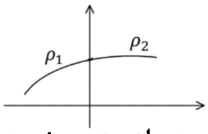
$t=\frac{2z_1}{z_1+z_2}$ מקדם העברה

תאום עכבות : $z_1=z_2 \Leftarrow t=1$ ו- $r=0$

שאלות

1) תרגיל – מיתר עם שתי צפיפויות ושני גלים

שני מיתרים מאוד ארוכים בעלי צפיפויות מסה שונות ρ_1 ו- ρ_2 מחוברים בנקודה x=0 ויוצרים מיתר אחד ארוך.



המתיחות במיתר היא אחידה
(כלומר לשני החלקים אותה מתיחות T)

שני גלים מגיעים לעבר נקודת האי רציפות : גל עם אמפליטודה A מגיע מצד ימין וגל עם אמפליטודה $3A$ מגיע מצד שמאל. שני הגלים בעלי אותה תדירות זוויתית ואין ביניהם הפרש פאזה קבוע.

א. רשמו ביטוי לפונקציית הגל בכל חלק של המיתר באמצעות מספרים מורכבים. הסבירו עבור כל איבר בפונקציה איזה גל הוא מתאר.

ב. רשמו את תנאי השפה שהפונקציות צריכות לקיים בנקודת אי הרציפות.

ג. השתמשו בתנאי השפה ובטאו את אמפליטודות כל הגלים במיתר, במונחים של האמפליטודה A ועכבות המיתר.

ד. חשבו שוב את האמפליטודות , הפעם באמצעות מקדמי העברה והחזרה.

תשובות סופיות

1) א.
$$\psi_1\left(x,t\right)=3Ae^{i\left(k_1x-\omega t\right)}+Be^{-i\left(k_1x-\omega t\right)}$$
$$\psi_2\left(x,t\right)=Ce^{i\left(k_2x-\omega t\right)}+Ae^{-i\left(k_2x-\omega t\right)}$$
3A – ימינה ; B – שמאלה ; C – ימינה ; A – שמאלה.

ב. $\left.\frac{\partial\psi_1}{2x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi_2}{2x}\right|_{x=0}$ $\qquad$ $\psi_1\left(0,t\right)=\psi_2\left(0,t\right)$

ג. $C=\frac{5z_1+z_2}{z_1+z_2}A$ $\qquad$ $B=\frac{3z_1-z_2}{z_1+z_2}A$

ד. הוכחה בסרטון.

אנרגיה הספק ותנע

רקע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר

$$\varepsilon(x,t) = \rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 = \rho v^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2|A|^2$$

הספק רגעי בנקודה - כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני כל יחידת זמן

$$P^{\pm} = \pm Z\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 = \pm v\varepsilon(x,t)$$

$P^{\pm}$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן

$$\bar{P}^{\pm} = \pm\frac{1}{2}z\omega^2|A|^2$$

מקדם ההחזרה של האנרגיה

$$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2$$

מקדם ההעברה של האנרגיה

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{P}_2^+}{\mathrm{P}_1^+} = \frac{\mathrm{z}_2}{\mathrm{z}_1}\mathrm{t}^2 = \frac{4\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2}{(\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2)^2}$$

$$\mathrm{R} + \mathrm{T} = 1$$

התנע הוא אפס

שאלות

1) תרגיל - חישובים בפגיעה בתווך

גל סינוס נע ימינה במיתר מסוים בו מהירות הגל היא v_1.
צורת הגל היא $\Psi_i(x,t) = 1.4mm \cdot sin(kx - 200t)$.
הגל מגיע לצומת בו צפיפות המיתר משתנה (המתיחות נשארת קבועה), כך שבחלק הימני מהירות הגל היא $v_2 = 5v_1$.
בהינתן שההספק הממוצע של הגל הפוגע הוא 60 W,

א. מהם האימפדנסים של שני חלקי המיתר?
ב. מהו ההספק הממוצע של הגל העובר והגל החוזר?
ג. מהי האמפליטודה של הגל העובר ושל הגל החוזר?

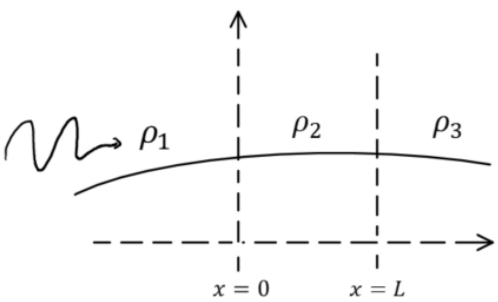
2) שינוי בהספק כתוצאה משינוי פרמטרים

נתון מיתר מתוח בעל צפיפות מסה $\rho = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{m}$ ומתיחות $T = 50N$.

א. מהו ההספק הממוצע שצריך לספק למיתר, על מנת לייצר גל סינוס בעל תדירות $f = 40\text{Hz}$ ואמפליטודה של $A = 4\text{mm}$?
ב. פי כמה ישתנה ההספק של הגל אם:
1. נכפיל את אורך החבל?
2. נכפיל את האמפליטודה ונקטין את התדירות פי 2?
3. נקפל את החבל לשניים ונשתמש בחבל הכפול כחבל החדש?

3) מיתר עם 3 חלקים

מיתר מורכב משלושה חלקים בעלי צפיפות מסה שונה, כפי שמופיע באיור להלן. גל מגיע מכיוון שמאל T (המתיחות של המיתר) זהה בשלושת החלקים.



א. רשמו ביטוי עבור חמשת הגלים הרלוונטיים בשאלה. עבדו בצורה מורכבת.
ב. מהם תנאי השפה בבעיה?
ג. רשמו את היחס בין אמפליטודת הגל העובר לאמפליטודת הגל הפוגע.
ד. רשמו ביטוי ליחס בין ההספק של הגל העובר להספק של הגל הפוגע.
ה. מה משמעות הדרישה $\frac{P_3}{P_1}$=1- ? הראו שעל מנת לקיים דרישה זו צריך להתקיים $z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$ ו- $L = \frac{\lambda}{4}$, כאשר λ הוא אורך הגל באזור האמצעי.

4) תרגיל - חישוב אמפליטודה בתיאום עכבות

מיתר בעל צפיפות מסה ρ_1 מחובר למיתר בעל צפיפות מסה ρ_2 באמצעות מיתר נוסף שצפיפות המסה שלו משתנה באופן רציף מ- ρ_1 ל- ρ_2 . במקרה כזה לא תתקיים החזרה אם אורך הגל קטן ביחס לקצב השינוי בצפיפות המסה.
חשבו תחת הנחה זו מה היחס בין האמפליטודה של הגל העובר לגל הפוגע?
הניחו מתיחות אחידה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1 = 1531\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}},\ z_2 = 506\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}}$ ב. $\overline{P}_R = 15.6\mathrm{W},\ \overline{P}_T = 44.4\mathrm{W}$

ג. $B = 0.71\mathrm{mm}\quad C = 2.1\mathrm{mm}$

2) א. $0.5\mathrm{W}$ ב.1. לא ישתנה. 2. לא ישתנה. 3. יגדל פי $\sqrt{2}$.

3) א. $\psi_2(x,t) = Ce^{i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(k_2x+\omega t)}$ $\psi_1(x,t) = Ae^{i(k_1x-\omega t)} + Be^{-i(k_1x+\omega t)}$

$\psi_3(x,t) = Ee^{i(k_3x-\omega t)}$

ב.
$$\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t)\quad T_1\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = T_2\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0}$$
$$\psi_2(2,t) = \psi_3(2,t)\quad T_2\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=L} = T_3\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=L}$$

ג.
$$\frac{4z_2z_1e^{i(k_2-k_3)L}}{\left[(z_1+z_2)(z_2+z_3)-(z_2-z_1)(z_2-z_3)e^{i2k_2L}\right]}$$

ד.
$$\frac{16z_2^2z_1z_3}{\left|(z_1+z_2)(z_2+z_3)-(z_2-z_1)(z_2-z_3)e^{2ik_2L}\right|^2}$$

ה. שכל האנרגיה של הגל הפוגע עוברת לגל העובר.

4) $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{4}}$

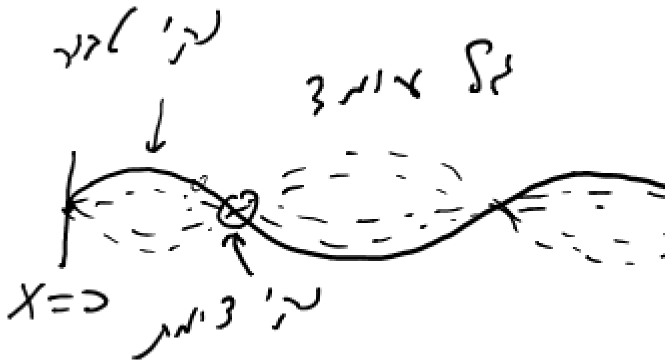
גלים עומדים

רקע

<u>מיתר חצי אינסופי</u>

<u>קצה קשור</u>

$$\Psi(x=0,t)=0 \quad => $$
$$\Psi(x,t)=C\sin(kx)\sin(\omega t+\varphi)$$



<u>קצה חופשי</u>

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \quad => \quad \Psi(x,t)=C\cos(kx)\cos(\omega t+\varphi)$$

<u>מיתר סופי</u>

<u>מיתר סופי עם 2 קצוות קשורים</u>

$$\Psi(x=0,t)=\Psi(x=\mathrm{L},t)=0$$

$$k_n=\frac{\pi n}{L} \qquad n=0,1,2,3\ldots \quad f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

<u>מיתר סופי עם קצה קשור וקצה חופשי</u>

$$\Psi(x=0,t)=0\,,\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{L}}=0$$

$$k_n=\frac{\pi}{L}(\mathrm{n}+\frac{1}{2})\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{(\mathrm{n}+\frac{1}{2})}$$

$$f_n=\frac{v}{2L}(\mathrm{n}+\frac{1}{2})$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

<u>מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים</u>

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0\ ,\qquad\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{L}}=0$$

$$k_n=\frac{\pi n}{L}\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

$$f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

פתרון באמצעות טור פוריה :

$$\Psi(x,t)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\sin(k_n x)+B_n\cos(k_n x)][C_n\sin(\omega_n t)+D_n\cos(\omega_n t)]$$

שאלות

1) תרגיל – גל פוגע וגל חוזר כביטוי של שני גלים עומדים

הראו כי הגל $\Psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + rA\cos(\omega t + kx)$, כאשר r קבוע כלשהו, ניתן לביטוי כסופרפוזיציה של שני גלים עומדים: $\Psi(x,t) =$
$A(1+r)\cos(\omega t)\cos(kx) + A(1-r)\sin(\omega t)\sin(kx)$

2) תרגיל - מיתר פלדה בפסנתר

מיתר פסנתר מיוצר מפלדה בעלת צפיפות מסה **ליחידת נפח** $\rho = 4800\frac{\text{kg}}{m^3}$
רדיוס המיתר הוא r, היצרן ממליץ להפעיל את המיתר תחת לחץ (כוח ליחידת ששטח חתך) של $1.3 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$.

א. הראו שמהירות הגלים במיתר אינה תלויה ברדיוס שלו, וחשבו אותה.
ב. מה צריך להיות אורך המיתר כדי שישמיע את הצליל 'לה', שתדירותו 440Hz ? כמנגנים במיתר בד"כ שומעים את התדירות הבסיסית.
ג. מגדילים את המתיחות פי α ללא שינוי באורך המיתר, מה צריכה להיות α כדי להעלות את תדירות המיתר פי 1.2?

3) תרגיל – קירות בחצי ומינוס חצי L

מיתר באורך L קשור בשני צדדיו לקיר כאשר קצוות המיתר הקשורים לקיר נמצאים ב x=L/2 וב- x=-L/2. נתון כי בזמן $t = 0$ המיתר כולו בשיווי משקל.

א. הציבו את תנאי השפה בפתרון של משוואת הגלים ומצאו את הקבועים המתאימים.
שימו לב כי אתם אמורים לקבל פתרון שונה ל n זוגי ול n אי-זוגי .
ב. שרטטו את ארבעת הפתרונות הראשונים, והשוו את התוצאה למה שמתקבל כאשר פותרים את הבעיה עבור קיר שמאלי ב- $x = 0$ וקיר ימני ב- $x = L$.
ג. רשמו פתרון כללי לבעיה על ידי שימוש בעקרון הסופרפוזיציה.

4) תרגיל - מודל של פסנתר

הצליל בפסנתר נוצר על ידי מכה של פטיש במיתר הקשור בשתי קצותיו. ברגע ההקשה $(t = 0)$ המיתר אופקי ומהירותו במיקום הפגיעה היא v_0. אורך המיתר הוא L. מרכז הפגיעה של הפטיש היא בנקודה $x = \frac{L}{2}$ כאשר אורך המגע של הפטיש עם המיתר הוא a.

א. מהם תנאי השפה בבעיה? הגדירו את ראשית הצירים בקצה אחד של המיתר.

ב. מהי צורת המיתר ברגע הפגיעה ($\Psi(x,0)$) ?

ג. רשמו את מהירות כל אלמנט של המיתר ברגע פגיעה.

ד. מצאו את $\Psi(x,t)$. ניתן להניח כי המתיחות וצפיפות המסה במיתר נתונות.

5) תרגיל - מיתר מכופף לפרבולה ומשוחרר ממנוחה

מיתר בעל אורך l קשור בשני קצותיו . ברגע $t = 0$ המיתר נמצא במנוחה, ומכופף כך שצורתו היא $\Psi(x,0) = x(l-x)$. $x = 0$ הוא הקצה השמאלי של המיתר. מצאו את פונקציית הגל של המיתר כתלות בזמן. הניחו שהמתיחות והצפיפות ידועים.

6) תרגיל - חישוב אנרגיה של מיתר

נתון מיתר באורך $l = 2\,m$, שהעכבה שלו היא $30\ \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$, והמתיחות שלו היא . $2000\,N$ישנו גל הכלוא במיתר זה, אשר צורתו נתונה על ידי $\Psi(x,t) =$ $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-3}\frac{2^{-n}}{n} sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) cos(\omega_n t)$.

א. האם המיתר מקובע בשני קצותיו, פתוח בשני קצותיו או פתוח בקצה אחד ומקובע בקצה השני? נמקו. הניחו כי הקצה של המיתר ב $x = 0$

ב. האם מהנתון ניתן לדעת, בלי לחשב, את המהירות החומרית ברגע $t = 0$?

ג. חשבו את האנרגיה הכוללת של המיתר.

7) תרגיל – מושכים מרכז של מיתר ומשחררים

נתון מיתר באורך l ובמתיחות T, ששני קצותיו קשורים. מזיזים את אמצע המיתר מרחק a משיווי המשקל ומשוחררים ממנוחה.

א. הראו כי בזמן $t = 0$ למיתר אנרגיה $\frac{2Ta^2}{l}$ בהנחה שהמתיחות לא משתנה.

ב. מצאו את פונקציית הגל של המיתר כתלות במיקום ובזמן.

ג. הראו ששלושת ההרמוניות בעלות התדירות הנמוכה ביותר מכילות 93.3% מהאנרגיה כשהמיתר משוחרר.

ד. מהי האנרגיה של המיתר ב $t = 3\,sec$?

8) תרגיל - מיתר מחובר בקצה לקפיץ

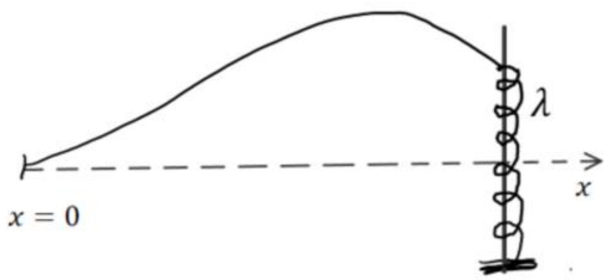
מיתר באורך L קשור בנקודה $x=0$ ובקצה $x=L$ מחובר לקפיץ אנכי בעל קבוע קפיץ λ . הקפיץ יכול לנוע בכיוון אנכי בלבד והוא רפוי כאשר המיתר אופקי . מתיחות המיתר היא T.

א. רשמו תנאי שפה למיתר והראו כי המשוואה ממנה ניתן למצא את המודים העצמיים היא $\tan(x)=-\alpha x$ כאשר $\alpha=\frac{T}{\lambda L}$, x=kL ,

ב. מה התוצאה במקרה $1 \gg \alpha$ ובמקרה $1 \ll \alpha$? מה המשמעות הפיזיקאלית של כל מקרה?

ג. שרטטו פתרון גרפי עבור $\alpha=1$ וסמנו את שלושת נקודות הפתרון הראשונות מהן מקבלים את שלושת אופני התנודה הראשונים.

ד. שרטטו את שני אופני התנודה הראשונים שקיבלתם בסעיף ג.



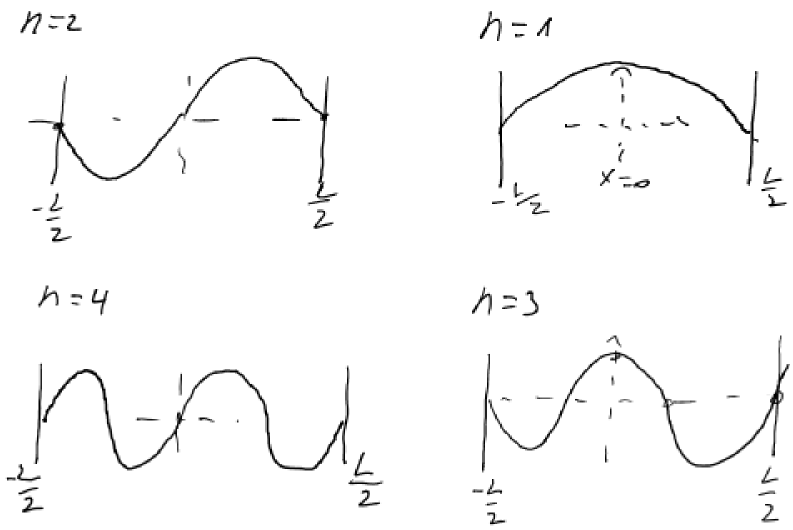
תשובות סופיות

1) הוכחה בסרטון.

2) א. $520\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ב. 59cm ג. 1.44

3) א. $\omega_n = v\cdot k_n$, $k_n = \frac{\pi n}{L}$, $\psi(x,t) = \begin{cases} A_n \sin k_n x \sin \omega_n t & n = \text{even} \\ B_n \cos k_n x \sin \omega_n t & n = \text{odd} \end{cases}$

ב.



ג. $\psi(x,t) = \sum_{n=2,even}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) + \sum_{n=1,odd}^{\infty} B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$

כאשר $k_n = \frac{\pi n}{L}, \omega_n = v k_n$

4) א. $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ ב. $\psi(x,0) = 0$

ג. $\dot{\psi}(x,0) = \begin{cases} v_0 & \frac{L-a}{2} LxL \frac{L+a}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ד. $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_0 L}{\pi^2 n^2}\sqrt{\frac{e}{T}} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n a}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin\left(\sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi n}{L}t\right)$

5) $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$, כאשר $\omega_n = v k_n$, $k_n = \frac{\pi n}{\ell}$,

וכן $D_n = \begin{cases} \frac{8\ell^2}{(\pi n)^3} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases}$.

6) א. הקצוות קשורים. ב. כן. ג. $8.25\cdot 10^{-4}\,\text{J}$

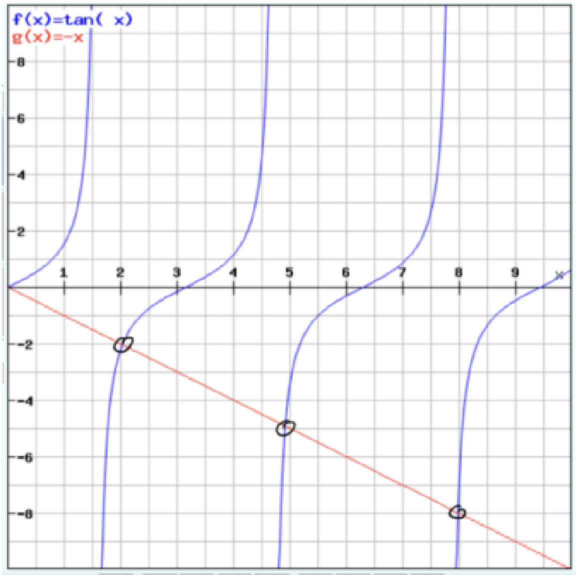
7) א. הוכחה בסרטון. ג. הוכחה בסרטון. ד. $\frac{2Ta^2}{l}$

ב. $k_2 = \frac{\pi n}{\ell}$, $A_n = \frac{8a}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, $\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k_n$, $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$

8) א. הוכחה בסרטון.

ב. במקרה $\alpha \gg 1$, $K_n = \frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right)$, קיבלנו K_n של קצה חופשי.

במקרה $\alpha \ll 1$, $K_n = \frac{\pi n}{L}$, קיבלנו K_n של קצה קשור.

ג. 

ד.